COMITATO NAZIONALE PER L'ENERGIA NUCLEARE
Laboratori Nazionali di Frascati

LNF-62/108

G. Sette: INTEGRALI NELLO SPAZIO DELLE FASI PER SISTEMI DI DUE E TRE PARTICELLE.

Nota interna: n° 175
20 Dicembre 1962.

Servizio Documentazione
dei Laboratori Nazionali di Frascati del CNEN
Casella Postale 70 - Frascati (Roma)

Laboratori Nazionali di Frascati del C.N.E.N.
Servizio Documentazione

LNF-62/108

Nota interna: n° 175
20 Dicembre 1962

G. Sette: INTEGRALI NELLO SPAZIO DELLE FASI PER SISTEMI DI DUE E TRE PARTICELLE.

1. - Energia massima di una particella nel sistema del baricentro (s.b.) di (n+1) particelle.

Siano (n+1) particelle di energia $E_o, E_1 \ldots E_n$ ed impulsi $\vec{P}_o, \vec{P}_1 \ldots \vec{P}_n$. Per una fissata energia totale W vogliamo trovare le configurazioni alle quali corrisponda un massimo per E_o . Ponendo (ora e nel seguito) c = 1 , chiamiamo:

$$(1) \qquad a^2 = (W-E_o)^2 - p_o^2 = (E_1 + \ldots + E_n)^2 - (\vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \ldots + \vec{P}_n)^2$$

Una qualsiasi configurazione delle (n+1) particelle è cinematicamente equivalente ad un decadimento di una particella fittizia di massa a ed energia (W-Eo) nelle particelle 1,2,..n, e ciò perché restano inalterate le relazioni sulle energie e sugli impulsi: $\sum E = W$ e $\sum \vec{p} = 0$.

Da considerazioni ovvie nel sistema di riposo della particella si ha:

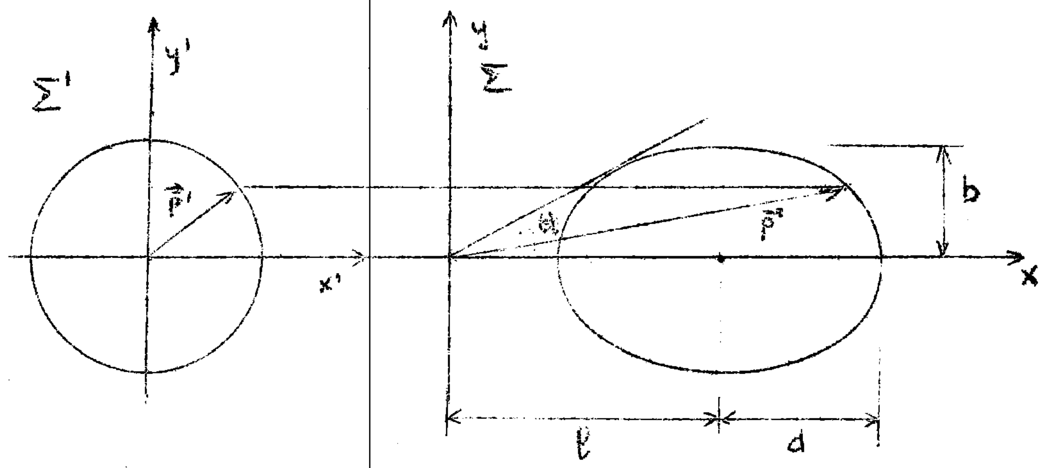
(2) $$a \geq m_1 + m_2 + \ldots\ldots + m_n$$

Essendo poi

$$a^2 = (W - E_0)^2 - p_0^2 = W^2 - 2E_0 W + m_0^2$$

si ha che E_0 è massimo quando a è minimo, cioè quando nella (2) si ha il segno di eguaglianza, e questo avviene quando nel sistema di quiete di a le particelle 1,2,...n sono pure in quiete, cioè quando hanno la stessa velocità nel sistema reale del baricentro. Quindi E_0 è massima per una fissata W quando le altre particelle vengono emesse come se fossero una sola.

2. - Richiamo sull'ellissoide degli impulsi



Con le solite considerazioni e notazioni, sia β_z la velocità relativa dei due sistemi Σ' e Σ. Si ha $\gamma_z(p'_x + \beta_z E')$ cioè $p'_x = \frac{p_x}{\gamma_z} - \beta_z E'$, quindi la $p'^2_x + p'^2_y + p'^2_z = p'^2$, diventa:

(3) $$(p_x - l)^2/d^2 + p_y^2/b^2 + p_z^2/b^2 = 1$$

ove

(4) $\ell = \beta_r \gamma_r E'$, $d = \gamma_r p'$, $b = p'$.

Dire che $\ell \gtreqless d$, significa dire che $\beta_r \gamma_r E' \gtreqless \gamma_r p'$, cioè , essendo $\beta' E' = p'$, $\beta_r \gtreqless \beta'$.

Supposto $\ell \geq d$, un calcolo analitico ovvio dà

$$\operatorname{sen} \theta_\ell = \frac{b}{\sqrt{\ell^2 - d^2 + b^2}}$$

e sostituendo le (4) si ha :

(5)
$$\operatorname{sen} \theta_\ell = \frac{\beta' \gamma'}{\beta_r \gamma_r} .$$

3. - Energie di due particelle nel loro s.b.

Si tratta di risolvere il sistema

$$\begin{cases} W = E_1 + E_2 = m_1 \gamma_1 + m_2 \gamma_2 \\ p_1 = p_2 = m_1 \gamma_1 \beta_1 = m_2 \gamma_2 \beta_2 \end{cases} .$$

Con semplici passaggi si ottiene:

(6)
$$\begin{cases} E_1 = \dfrac{W}{2} \left(1 + \dfrac{m_1^2 - m_2^2}{W^2} \right) \\ E_2 = \dfrac{W}{2} \left(1 + \dfrac{m_2^2 - m_1^2}{W^2} \right) \\ p_1 = p_2 = \dfrac{W}{2} \left[1 + \dfrac{(m_1^2 - m_2^2)^2}{W^4} - 2 \dfrac{m_1^2 + m_2^2}{W^2} \right]^{1/2} \end{cases}$$

Per comodità successiva notiamo che

(7)
$$\frac{dE_1}{dW} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{m_2^2 - m_1^2}{W^2} \right)$$

Posto:

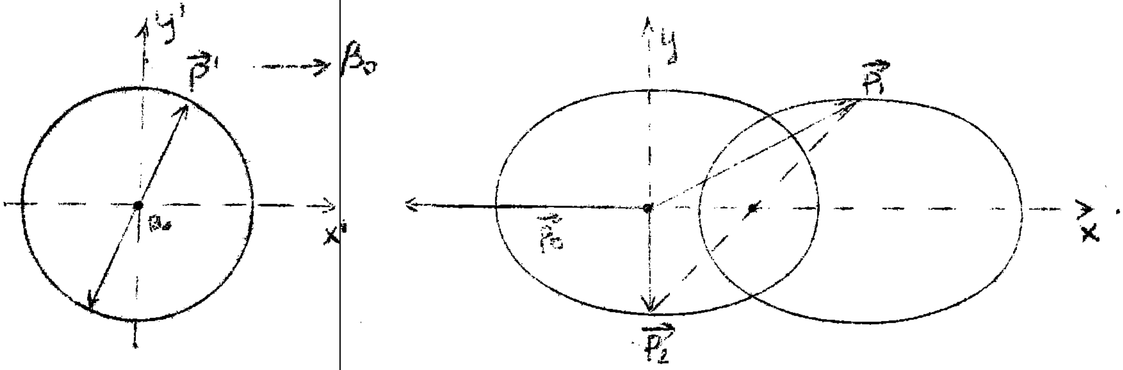
(8)
$$H = \left[1 - 2 \frac{m_1^2 + m_2^2}{W^2} + \frac{(m_1^2 - m_2^2)^2}{W^4} \right]$$

Si vede facilmente che

(9) $$H=\left(1-\frac{a_m^2}{W^2}\right)^2+4\,\frac{m_1 m_2}{W^2}\left(1-\frac{a_m^2}{W^2}\right)$$

ove $a_m = m_1+m_2$, cioè il minimo nella (2).

4. - Configurazione di un sistema di tre particelle nel s.b.



Sia W l'energia disponibile nel s.b. Fissato il momento p_0 vogliamo vedere come si distribuiscono gli altri due.

Consideriamo il sistema, cinematicamente equivalente, del decadimento della particella fittizia di massa (1). Nel sistema di riposo di questa particella l'energia totale a si distribuisce secondo le (6), e la sfera degli impulsi si trasforma in due ellissoidi:

$$(p_{ix}-\ell_i)^2/d^2+p_{iy}^2/b^2+p_{iz}^2/b^2=1 \qquad (i=1,2)$$

ove dalle(4) e (6)

(10) $$\begin{cases} \ell_1=\beta_0\gamma_0 E_1'=\dfrac{p_0}{a}E_1'=\dfrac{p_0}{2}\left(1+\dfrac{m_1^2-m_2^2}{a^2}\right) \\ \ell_2=\dfrac{p_0}{a}E_2'=\dfrac{p_0}{2}\left(1+\dfrac{m_2^2-m_1^2}{a^2}\right) \\ b^2=p'^2=\dfrac{a^2}{4}H \\ d^2=\gamma_0^2 p'^2=\dfrac{(W-E_0)^2}{a^2}\,\dfrac{a^2}{4}H=\dfrac{(W-E_0)^2}{4}H \end{cases}$$

ove H è data dalla(8) e (9) con a al posto di W. Ne segue che per a= amin si ha una sola configurazione, cioè l'ellissoide diventa un punto. Supposto poi $m_2 > m_1$, ed essendo

$$l_1 - l_{1m} = \frac{p_0}{2}\left(m_2^2 - m_1^2\right)\left(\frac{1}{a_m^2} - \frac{1}{a^2}\right)$$

Si vede che all'aumentare dell'energia W aumenta a ed aumenta $l_1 - l_1 m$, cioè un ellissoide contiene il precedente.

5. - Volume nello spazio delle fasi per unità di energia per un sistema di due particelle nel s.b. .

Nel s.b. il volume dello spazio delle fasi si definisce con .

$$\int \prod_{i=1}^{n-1} dp_{ix}\, dp_{iy}\, dp_{iz} \tag{11}$$

Ove l'impulso della particella n^{esima} si è eliminato tramite la $\sum \vec{p} = 0$

Il volume per unità di energia totale è quindi :

$$\rho_n = \frac{d}{dW} \int \prod_{i=1}^{n-1} dp_{ix}\, dp_{iy}\, dp_{iz} \tag{12}$$

Nel nostro caso **n=2, quindi:**

$$\rho_2 = \frac{d}{dW} \int dp_{1x}\, dp_{1y}\, dp_{1z}$$

ma $\int dp_{1x}\, dp_{1y}\, dp_{1z} = \frac{4\pi}{3} p_1^3$ e quindi, essendo pdp = EdE,

$$\rho_2 = \frac{d}{dW}\left(\frac{4}{3}\pi p_1^3\right) = 4\pi p_1^2 \frac{dp_1}{dW} = 4\pi p_1 E_1 \frac{dE_1}{dW} \tag{13}$$

Quindi dalle (6) e (7) si ha:

(14) $$\rho_2 = \frac{\pi}{2} W^2 H \left[1 - \frac{(m_1^2 - m_2^2)^2}{W^4} \right] .$$

6. - Spettro degli impulsi per un sistema a tre particelle.

Il volume dello spazio delle fasi relativo alle configurazioni associate ad un impulso della particella 1 tra p_1 e $p_1 + dp_1$ è:

(15) $$4\pi p_1^2 dp_1 \int_{W_{min}}^{W} \prod_{i=2}^{n-1} dp_{ix}\, dp_{iy}\, dp_{iz} \quad ,$$

ove $4\pi p_1^2 dp_1$ è il contributo all'integrale (11) dovuto alla particella 1 e l'integrazione tra W_{min} e W invece che tra O e W scaturisce dal fatto che esiste una energia minima per le configurazioni con fissato impulso p_1.

Il volume dello spazio delle fasi per unità di energia totale W o per unità di p_1 è quindi:

(16) $$\sigma_n = 4\pi p_1^2 \frac{d}{dW} \int_{W_{min}}^{W} \prod_{i=2}^{n-1} dp_{ix}\, dp_{iy}\, dp_{iz} \quad .$$

Per un sistema a tre corpi si ha semplicemente, in base alle conclusioni tratte alla fine del §(4) ed usandone le stesse notazioni:

(17) $$\int_{W_{min}}^{W} dp_{1x}\, dp_{1y}\, dp_{1z} = \int_{W_{min}}^{W} dp_{2x}\, dp_{2y}\, dp_{2z} = \frac{4}{3}\pi b^2 d = V$$

e dalle (10) si ha $V = \frac{\pi}{6}(W - E_0) a^2 H^{3/2}$ e con una derivazione ovvia ma non immediata si ha:

(18) $$\frac{dV}{dW} = \frac{\pi}{6} H^{\frac{1}{2}} \left\{ 3(W - E_0)^2 \left[1 - \frac{(m_1^2 - m_2^2)^2}{a^4} - p_0^2 H \right\} \right.$$

e quindi

(19) $$\sigma_3 = \frac{2}{3}\pi^2 p_0^2 H^{\frac{1}{2}} \left\{ 3(W-E_0)^2 \left[1 - \frac{(m_1^2-m_2^2)^2}{a^4} \right] - p_0^2 H \right\}$$

Si ha poi

$$\rho_3 = \int_0^{p_{0max}} \sigma_3 \, dp_0$$

ove Pomax è dato, in base alle considerazioni del §(1) dalla III. delle (6) ove $m_1 \to m_0$ e $m_2 \to m_1 + m_2$.

7. - Invarianza di $dp_x dp_y dp_z / E$.

Con le solite notazioni si ha:

(20) $$\begin{cases} p_x = \gamma p'_x + \beta\gamma E' \\ p_y = p'_y \\ p_z = p'_z \\ E = \gamma E' + \beta\gamma p'_x \end{cases}$$

Differenziando con p_y e p_z costanti la 1° delle (20) e tenendo presente che $E'dE' = p'_x dp'_x$ si ha:

$$dp_x = \gamma\, dp'_x + \beta\gamma\, dE' = \frac{dp'_x}{E'}\left(\gamma E' + \beta\gamma p'_x\right) = \frac{dp'_x}{E'} E \, .$$

Cioè $dp_x/E = dp'_x/E$, ed essendo $dp_y = dp'_y$ e $dp_z = dp'_z$ si ha ;

(21) $$dp_x\, dp_y\, dp_z / E = \text{invariante}$$

In coordinate sferiche notiamo che:

(22) $$dp_x\, dp_y\, dp_z = -p^2 dp\, d\cos\theta\, d\varphi \, .$$

8. - Richiami su alcune grandezze nel sistema del laboratorio.

Limitiamoci a processi di fotoproduzione; consideriamo un fotone di energia K che investe una particella di massa m_0 .La velocità β_b del baricentro può facilmente determinarsi come segue: essendo $p=\beta E$, nel nostro caso $p=K$ ed $E=K+m_0$, è quindi

(23) $$\beta_b = \frac{K}{K+m_0}$$

L'energia disponibile W nel s.b. può ricavarsi dall'invariante $E_{tot}^2 - P_{tot}^2 = W^2$, nel nostro caso $E_{tot}^2 - P_{tot}^2 = (K+m_0)^2 - K^2 = m_0(2K+m_0)$ quindi

(24) $$W = \sqrt{m_0(2K+m_0)}$$

La grandezza γ non è altro che l'incremento di massa dovuto al moto nel nostro caso quindi:

(25) $$\gamma_b = \frac{K+m_0}{W}$$

Come poteva ricavarsi con qualche calcolo da (23) e (24).
Se nel s.b. dopo la fotoproduzione si hanno due masse m_1 ed m_2 deve essere

(26) $$W \geq m_1 + m_2$$

Se $m_2 = m_0$ dalla (24) e (26) si ha l'energia di soglia per la fotoproduzione della particella di massa m_1 :

$$K \geq K_s = m_1 + \frac{m_1^2}{2m_0} \tag{27}$$

Notiamo che nel caso di una reazione $(K)+(m_0) \to (m_0)+(m_1)$. Si hanno sempre angoli limiti per la particella (m_0); infatti affinché ciò si verifichi deve essere (secondo il § 2)):

$$\beta_0^* \leq \beta_b$$

(ove l'asterisco indica le grandezze nel s.b.), ma questa condizione implica:

$$\gamma_0^* \leq \gamma_b$$

e tramite la (6) e la (25);

$$\gamma_0^* = \frac{E_0^*}{m_0} = \frac{W}{2m_0}\left(1 + \frac{m_0^2 - m_1^2}{W^2}\right) \leq \frac{K + m_0}{W}$$

che è equivalente alla $m_0(2K+m_0)+m_0^2-m_1^2 \leq 2m_0(K+m_0)$, cioè alla

$$m_1^2 \geq 0$$

che è sempre verificata.

9. - Fattore statistico della particella (m_0) nel s.I.

Il contributo alla distribuzione in angolo ed energia della particella (m_0) nel s.b. dovuto alla semplice estensione nello spazio delle fasi delle configurazioni in considerazione è:

$$\frac{\sigma_3}{4\pi}\, d\cos\theta^*\, d\phi^*\, d\beta_0^*$$

Consideriamo il caso $m_1=m_2=m$ e ponendo $\sigma_3/4\pi = f^{\rho *}(\theta^*,\phi^*,p_0^*)$ si ha :

$$f^{\rho *}(\theta^*,\phi^*,p_0^*)\,d\cos\theta^*\,d\phi^*\,dp_0^* =$$

$$= \frac{\pi}{6}\,p_0^{*2}\,H^{\frac{1}{2}}\left\{3(W-E_0^*)^2 - p_0^{*2}H\right\} d\cos\theta^*\,d\phi^*\,dp_0^* =$$

(28)
$$= \frac{\pi}{6}\,E^*\,H^{\frac{1}{2}}\left\{3(W-E_0^*)^2 - (E_0^{*2}-m_0^2)H\right\} \frac{p_0^{*2}\,dp_0^*\,d\cos\theta^*\,d\phi^*}{E^*}$$

Per trasformare questa espressione nel sistema del laboratorio, notiamo che per la (21) e (22) l'ultima frazione è invariante ed inoltre si ha dalla (23) e (25):

$$E_0^* = \gamma_b\left(E_0 - \beta_b p_0 \cos\theta\right) = \frac{K+m_0}{W}\left(E_0 - \frac{K}{K+m_0}\,p_0\cos\theta\right) = \frac{E_0(K+m_0) - K p_0\cos\theta}{W}$$

e posto

(29)
$$T = E_0(K+m_0) - K p_0 \cos\theta$$

si ha

(30)
$$E_0^* = T/W$$

e per H si ha l'espressione della (24),

(31)
$$H = 1 - \frac{4m^2}{(W-E_0^*)^2 - E_0^{*2} + m_0^2} = 1 - \frac{2m^2}{m_0(K+m_0) - T}$$

La 28 diventa quindi

$$f^{\rho}(\theta,\phi,p_0)\,d\cos\theta\,d\phi\,dp_0 = \frac{\pi}{6}\,\frac{T}{W^3}\,H^{\frac{1}{2}}\left\{3(W^2-T)^2 - (T^2 - m_0^2W^2)H\right\}\frac{p_0^2\,dp_0\,d\cos\theta\,d\phi}{E_0}$$

Notando poi che $p_0 dp_0 = E_0 dE_0$

si ha per la funzione di distribuzione in angolo ed energia:

$$(32) \qquad f(\theta,\phi,E_0) = \frac{\pi}{6} p_0 \frac{T}{W^3} H^{\frac{1}{2}} \left\{ 3(W^2-T)^2 - (T^2 - m_0^2 W^2) H \right\}$$

Notiamo che essendo $T=WE_0^*$ e $W>0$ e $E_0^* > m_0$ è sempre

$$(33) \qquad T > 0$$

Notiamo poi che dalla (8) ponendo $m_1=m_2$ si ha

$$(34) \qquad 0 \leq H < 1$$

e da questo si deduce che

$$\left\{3(W^2-T)^2-(T^2-m_0 W^2)H\right\} = W^2\left\{3(W-E_0^*)^2-p_0^{*2}H\right\} > W^2\left\{3(W-E_0^*)^2-p_0^{*2}\right\} =$$
$$= W^2\left\{2(W-E_0^*)^2+a^2\right\} > 0$$

Quindi

$$(35) \qquad f=0 \quad \text{quando e solo quando} \quad H=0$$

Ora H=0 corrisponde per la (9) ad $a = a_{min}$ e cioè in base alle considerazioni del §(1) all'emissione delle due particelle (m) con egual β^* fatto che coinvolge il massimo per l'impulso p_0^* ed in corrispondenza di questo si hanno i limiti sugli angoli ed energia della particella (m_0) nel s.L.

Infatti esplicitando l'equazione H=0, tramite le (31) e (29), e tenendo presente che la (27) nel nostro caso si scrive

$$(36) \qquad K_S = 2m + \frac{(2m)^2}{2m_0}$$

si ha l'equazione di 2° in E_0:

$$E_0^2\left\{K^2\cos^2\theta-(K+m_0)^2\right\}+2E_0(K+m_0)m_0\left[(K-K_s)+2m+m_0\right]-m_0^2\left[(K-K_s)+2m+m_0\right]^2-K^2m_0^2\cos^2\theta=0$$

Risolvendo questa equazione si ottiene:

$$(37)\quad E_0=m_0\,\frac{\left(1+\frac{m_0}{K}\right)\left[\left(1-\frac{K_s}{K}\right)+\frac{2m+m_0}{K}\right]\pm\cos\theta\sqrt{\operatorname{sen}^2\theta_e-\operatorname{sen}^2\theta}}{\left(\frac{m_0}{K}\right)^2+2\,\frac{m_0}{K}+\operatorname{sen}^2\theta}$$

ove si è posto:

$$(38)\qquad \operatorname{sen}^2\theta_e=\left(1-\frac{K_s}{K}\right)^2+\frac{4m}{K}\left(1-\frac{K_s}{K}\right)$$

Ovviamente dovendo essere nella (37) il radicando positivo si ha che la (38) è proprio l'espressione per l'angolo limite della particella (m_0) in corrispondenza all'energia K del fotone incidente. Quindi per ogni angolo $\theta<\theta_e(K)$ si ha che il protone può assumere tutte le energie comprese tra i due valori (37) in corrispondenza di ogni K.

Questo è proprio il campo di definizione della funzione $f(\theta,\phi,E_0)$.

De~~ll~~e formule (32) e (37) esiste un programma per calcolatrice IBM 1960 elaborato dal Dr. A. Turrin.

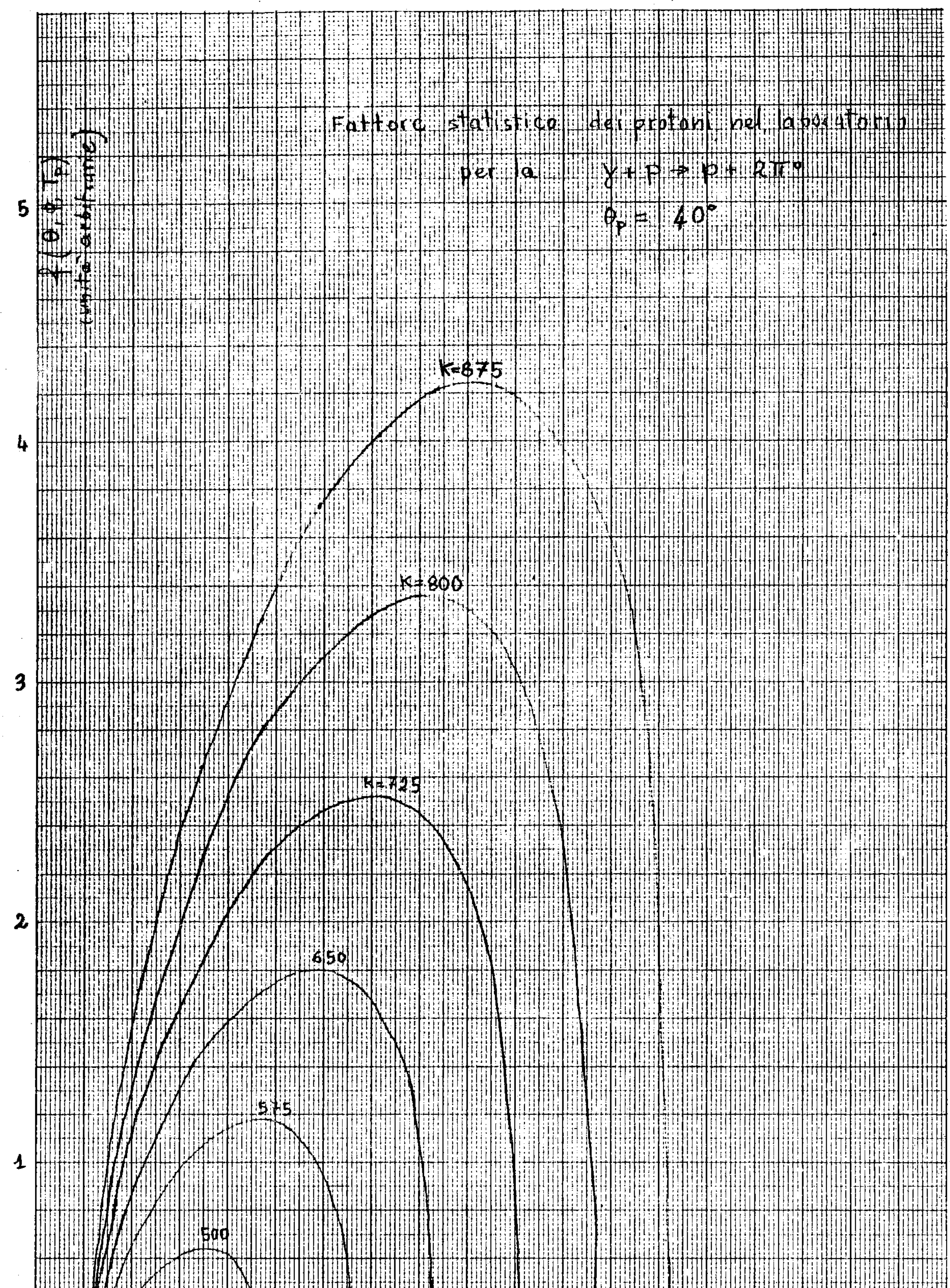
Bibliografia:

(1) - M. Block, Phase-Space Integrals for Multiparticle Systems Phys.Rev. 101, 796 (1956).

(2) - R. Querzoli e V. Silvestrini, Studio cinematico del processo $\gamma + p \Rightarrow p + 2\pi^0$, lab. Naz. di Frascati, Rapporto LNF.- 62/59 (1962).

(3) - P.G. Sona, Cinematica delle reazioni relativistiche a due corpi, Lab. Naz. di Frascati, Rapporto LNF. - 57/9 (1957).

(4) - A.M. Baldin, V.I. Gol'danskii, I.L. Rozenthal, Kinematics of nuclear reactions (Pergamon Press, London , 1961).



Fattore statistico dei protoni nel laboratorio
per la $\gamma + p \rightarrow p + 2\pi^0$
$\theta_p = 40°$
$f(\theta, \phi, T_p)$ (unità arbitrarie)
K=875
K=800
K=725
650
575
500
425
0
1
2
3
4
5
0
20
40
60
80
100
120
140
160
180
200
T_p (MeV)